

二次型练习题

一、单项选择题

1-5 BCBCD 6-10 DDBDB

二、填空题

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$

3. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

4. $f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

5. 1

6. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

7. 3

8. 2

9. $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

10. $a = \underline{\quad 1 \quad}, b = \underline{\quad 2 \quad}$

三、计算题

1. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

解: $f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 - x_2)^2 - 2x_2^2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

$$= 2(x_1 - x_2)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 - x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

则原二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$

由 (1) 可得由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

2. 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形, 并写出所作的可逆线性变换.

解: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

则原二次型的标准形为 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$

由 (1) 可得由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

线性变换的矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因为 $|C| = 1 \neq 0$, 所以这是一个可逆线性变换.

3. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, (1) 将其化为标准形, 并写出对应的线性变换; (2) 指出它的正惯性指数和负惯性指数.

解: $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + (x_3 - x_2)]^2 - (x_3 - x_2)^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 - 5x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 3x_3)^2 + 4x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

则原二次型的标准形为 $f = y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$

由 (1) 可得由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

所以正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

4. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

解: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_2x_3$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 3(x_2 + x_3)^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

则原二次型的标准形为 $f = y_1^2 - 3y_2^2$

由 (1) 可得由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

5. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

解: 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 即 $X = C_1Y$, 其中 $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

原二次型化为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= y_1^2 + 2y_1y_3 - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{再令} \begin{cases} z_1 = y_1 & + y_3 \\ z_2 = & y_2 \\ z_3 = & y_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 & - z_3 \\ y_2 = & z_2 \\ y_3 = & z_3 \end{cases}$$

此线性变换可记为 $Y = C_2 Z$ ，其中线性变换的矩阵 $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

由此得二次型的标准形

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 z_1, z_2, z_3 的线性变换 $X = C_1 Y = C_1 C_2 Z = CZ$ ，其中 $C = C_1 C_2$ ，即

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = & z_3 \end{cases}$$

6. 求可逆线性变换，将下列二次型化为标准形。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ 为标准形，并写出对应的线性变换。

$$\text{解： } f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = & x_2 + x_3 \\ y_3 = & x_3 \end{cases} \quad (1)$$

则原二次型的标准形为 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

由 (1) 可得由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

线性变换的矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因为 $|C| = 1 \neq 0$, 所以这是一个可逆线性变换.

7. 用正交变换法化二次型为标准形, 并写出所做的正交变换。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

解: 二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-9)$$

特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 的基础解系为: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 的基础解系为: } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

把 α_1, α_2 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

将 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 单位化:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, p_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

所求的正交矩阵: $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

正交变换为 $X = QY$, 标准形为 $f = 9y_3^2$