

二次型练习题

一、单项选择题

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ 的矩阵为 ()。

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 二次型 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ 的矩阵表示正确的是 ()。

(A) $(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (B) $(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
(C) $(x, y) \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (D) $(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3. 对二次型, 下列说法正确的是 ()。

- (A) 二次型的秩不是唯一的 (B) 二次型的标准形不是唯一的
(C) 二次型的规范形不是唯一的 (D) 二次型矩阵不是唯一的

4. 已知二次型 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2$, 则 ()。

- (A) 正惯性指数为 1 (B) 正惯性指数为 2
(C) 正惯性指数为 3 (D) 正惯性指数为 4

5. n 阶对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 ()

- (a) $|A| > 0$ (b) 存在阶阵 C , 使 $A = C^T C$
(c) 负惯性指数为零 (d) 各阶顺序主子式为正

6. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, 则 f 的秩为 ()。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 对于二次型, 下列说法错误的是 ()。

- (A) 二次型的正惯性指数是唯一的 (B) 二次型的负惯性指数是唯一的
(C) 二次型的规范形是唯一的 (D) 二次型的秩不是唯一的

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 A 的三个特征值分别为 1, 4, -5, 则它的规范形是 ()。

- (A) $y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$ (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (C) $y_1^2 - 4y_2^2 + 5y_3^2$ (D) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

9. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 合同, 则().

(A) A 与 B 有相同的特征值 (B) A 与 B 相似

(C) $\det A = \det B$ (D) $r(A) = r(B)$

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ().

(A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似
(C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

二、填空题

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的矩阵是_____

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 其对应的二次型为_____

3. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____.

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 则其规范形为_____

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正惯性指数为_____.

6. 已知二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 对应的二次型为 $f(x_1, x_2, x_3) =$ _____

7. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2, 则 $c =$ _____

8. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $X = QY$ 可化为标准形 $f = 6y_1^2$, 则 $a =$ _____

9. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ 的矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1$, 则此二次型的规范形为_____

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ ($b > 0$), 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12, 则 $a =$ _____, $b =$ _____

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 a 满足条件_____

12. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + ax_3^2$ 则当 a 的取值为_____时,
二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的。

13. 二次型 $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ 的负惯性指数是_____

14. 二次型 $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 的矩阵为_____

三、计算题

1. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

2. 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形, 并写出所作的可逆线性变换。

3. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, (1) 将其化为标准形, 并写出对应的线性变换; (2) 指出它的正惯性指数和负惯性指数。

4. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

5. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 为标准形, 并写出对应的线性变换。

6. 求可逆线性变换, 将下列二次型化为标准型。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

7. 用正交变换法化二次型为标准形, 并写出所做的正交变换。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$