特征值与特征向量练习题

一．单项选择题

1. 矩阵$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$有一个特征值为（　　　）

$(A)\ -3 \quad (B)\ -2 \quad (C)\ 1 \quad (D)\ 2$

2. 设n阶矩阵A满足$\left|2E-3A\right|=0$，则A必有一个特征值$\lambda=$（　　　　）

$(A)\ -\dfrac{3}{2} \quad (B)\ -\dfrac{2}{3} \quad (C)\ \dfrac{3}{2} \quad (D)\ \dfrac{2}{3}$

3. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且$A$的特征值为$1,2,3$．则$x=$（　）

$(A)\ -2 \quad (B)\ 2 \quad (C)\ 3 \quad (D)\ 4$

4.若A与B相似，则有（　　　　　　）

$(A)\ \lambda E-A=\lambda E-B \qquad (B)\ A=B$

$(C)\left|\lambda E-A\right|=\left|\lambda E-B\right| \qquad (D)\ A^*=B^*$

5.设三阶矩阵A的特征多项式$\left|A-\lambda E\right|=(\lambda-2)(\lambda+3)^2$，则$\left|A+E\right|=$(　　　)

$(A)\ -18 \quad (B)\ -12 \quad (C)\ 12 \quad (D)\ 18$

6. 设矩阵A与B相似，则（　　　　）

（A）A与B　有相同的逆矩阵　　（B）A与B有相同的特征值和特征向量

（C）A与B都相似于同一对角阵　（D）对任意常数t，　$A-tE$与$B-tE$相似

7.与矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$相似的矩阵是（　　　）

（A）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8.可逆矩阵A的一个特征值$\lambda=2$，则矩阵$\left(\dfrac{1}{3}A^2\right)^{-1}$的一个特征值为（　　　）

$(A)\ \dfrac{4}{3} \quad (B)\ \dfrac{3}{4} \quad (C)\ \dfrac{1}{2} \quad (D)\ \dfrac{1}{4}$

9. 已知 3 阶矩阵 A 与 B 相似，$tr(A)=4$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & x \end{bmatrix}$，则 $x=$（　　）

(a) 2　　(b) -2　　(c) 4　　(d) -6

10. 矩阵 A与B 为 n 阶方阵，下列命题正确的是（　　）

(a) A与B 等价，则 A与B 相似　　(b) A与B 等价，则 A与B 合同

(c) A与B 相似，则 A与B 等价　　(d) A与B 相似，则 A与B 合同

11. n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值是矩阵 A 与对角矩阵相似的（　　）
(a) 充分必要条件　　(b) 充分而非必要条件
(c) 必要而非充分条件　　(d) 既非充分也非必要条件

12. 设 A 是 n 阶方阵，则 A 能与 n 阶对角阵相似的充要条件是（　　）
(a) A 是对角矩阵　　(b) A 有 n 个互不相同的特征向量
(c) A 有 n 个线性无关的特征向量　　(d) A 有 n 个互不相同的特征值

13. 若 Q 为正交矩阵，则下列说法不正确的是（　　）

(a) Q 的行列式的值为 1 或-1

(b) 若 P 是正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵

(c) Q 可逆，且 $Q^{-1}=Q^T$

(d) Q 为正交矩阵的充要条件是 Q 的行（列）向量组是正交向量组

14. 下列结论中不正确的是（　　）
(a) 单位矩阵 E 是正交矩阵　　(b) 两个正交矩阵的和是正交矩阵
(c) 两个正交矩阵的积是正交矩阵　　(d) 正交矩阵的逆矩阵是正交矩阵

15. 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量（　　）
(a) 线性相关　　(b) 线性无关
(c) 两两相交　　(d) 其和仍是特征向量

16. $|A|=|B|$ 是 n 阶矩阵 A 与 B 相似的（　　）

(a) 充要条件　　(b) 充分而非必要条件

(c) 必要而非充分条件　　(d) 既不充分也不必要条件

二．填空题

1. 已知 $\alpha_1=(1\quad 2\quad 3)$，$\alpha_2=(2\quad 2\quad k)$ 正交，则 $k=$____________。

2. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$，且矩阵 B 与 A 相似，则 $\left|B^2+E\right|=$__________。

3. 设二阶实对称矩阵 A 的特征值为 -1， 1，则 $A^2 =$________________.

4. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$的两个特征值之积为________________。

5. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$的两个特征值之和为________________。

6. 设 A 为三阶方阵，且$\left|A-E\right| = \left|A-\frac{1}{2}E\right| = \left|A-\frac{1}{3}E\right| = 0$,则$\left|A^{-1}+2E\right| =$_____________.

7. 设 A 为三阶方阵,其特征值为 $-1,\ 2,\ 3$,则 A^2-3A+E 的特征值为______________。

8. 设二阶矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$相似， 则数 $a =$________________。

9．设向量 $\alpha = (-1,2,0)^T, \beta = (3,1,-4)^T$，则 α 和 β 的内积 $(\alpha,\beta) =$________

10. 已知向量 $\alpha = (-1,1,-1,1)^T$，则 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|} =$________

11. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为-1, 0, 2, 则行列式$\left|A^2+A+I\right| =$___________

12. 设二阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，则 A 的特征值为__________

13. 特征值全为 1 的正交阵必是_________阵

14. 若四阶矩阵 A与B 相似， A 的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则$\left|B^{-1}-E\right|$=_________

15. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & x \end{bmatrix}$的三个特征值之和为 18，则 $x =$________

三．计算题

1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的全部特征值和特征向量。

3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$是否可以对角化，若是，求出相应的对角矩阵。

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\x&1&1\end{bmatrix}$与对角矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$相似，求数 x 与可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP=B$.

5. 求非奇异矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

1） $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　　　2） $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-3&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$

6. 已知三阶方阵 A 的三个特征根为 1, 1, 2, 其相应的特征向量依次为 $(0,0,1)^T,(-1,1,0)^T,(-2,1,1)^T$, 求矩阵 A .

7. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$，有一个特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，求 a,b 的值，并求出对应于 α 的特征值。

8. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&b\end{bmatrix}$有特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$，求参数 a 、b 的值。

9. 判断下列矩阵 A 是否可对角化。若可以对角化，试求出可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

（1） $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}$；　　　　（2） $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&3&4\\-1&-1&-2\end{bmatrix}$；

四、证明题

1. 若 n 阶方阵 A与B 相似，证明: $|A|=|B|$

2. 若 n 阶方阵 A与B 相似，证明： A^T与B^T 相似

3. 若 n 阶方阵 A与B 相似，证明： A^{-1}与B^{-1} 相似

4.已知 λ 是 A 的特征值，证明 λ^2 是 A^2 的特征值，$\lambda + a$ 是 $A + aE$ 的特征值。